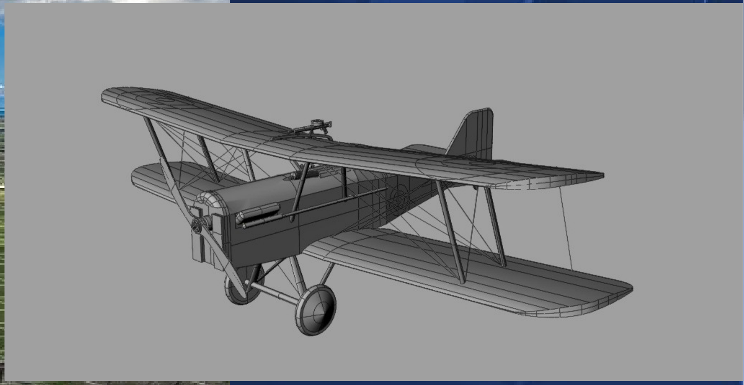
Premeny vektorov v počítačovej grafike

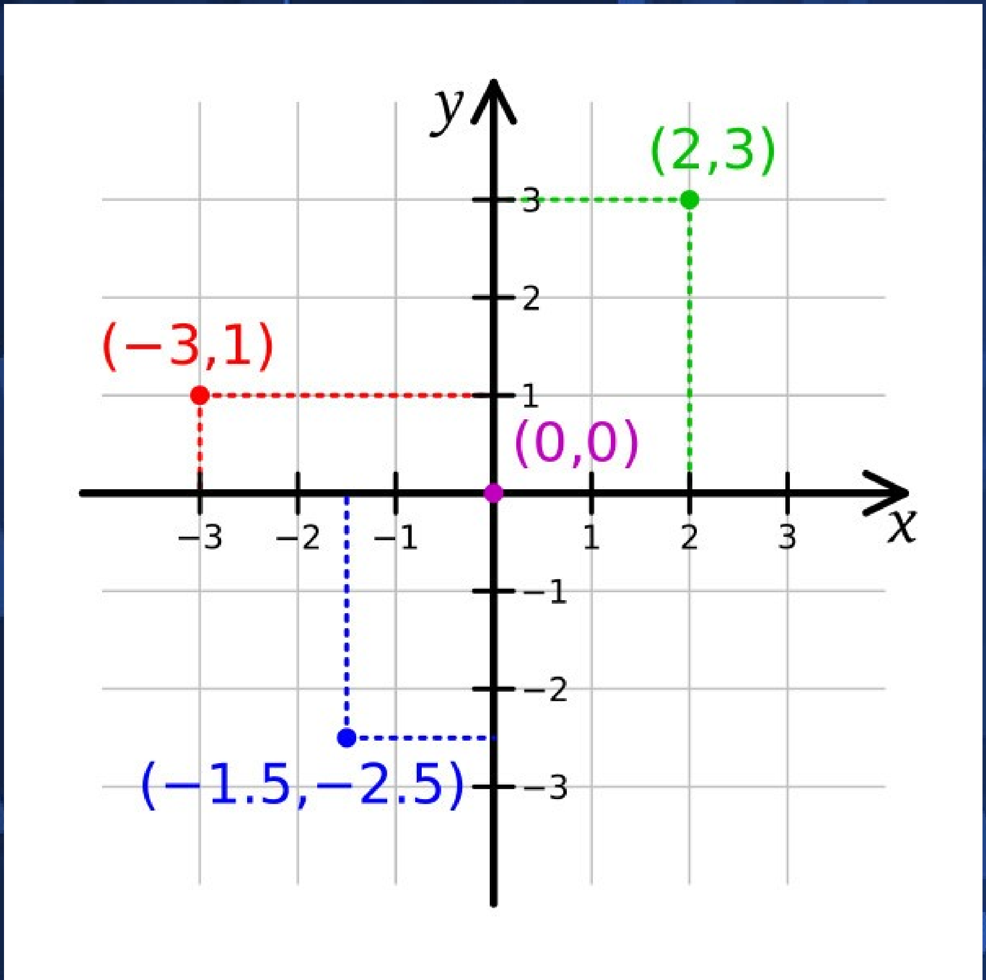
Miroslav Hájek
septima

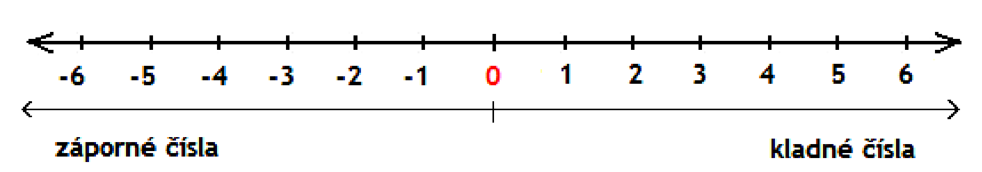
Kde sme?

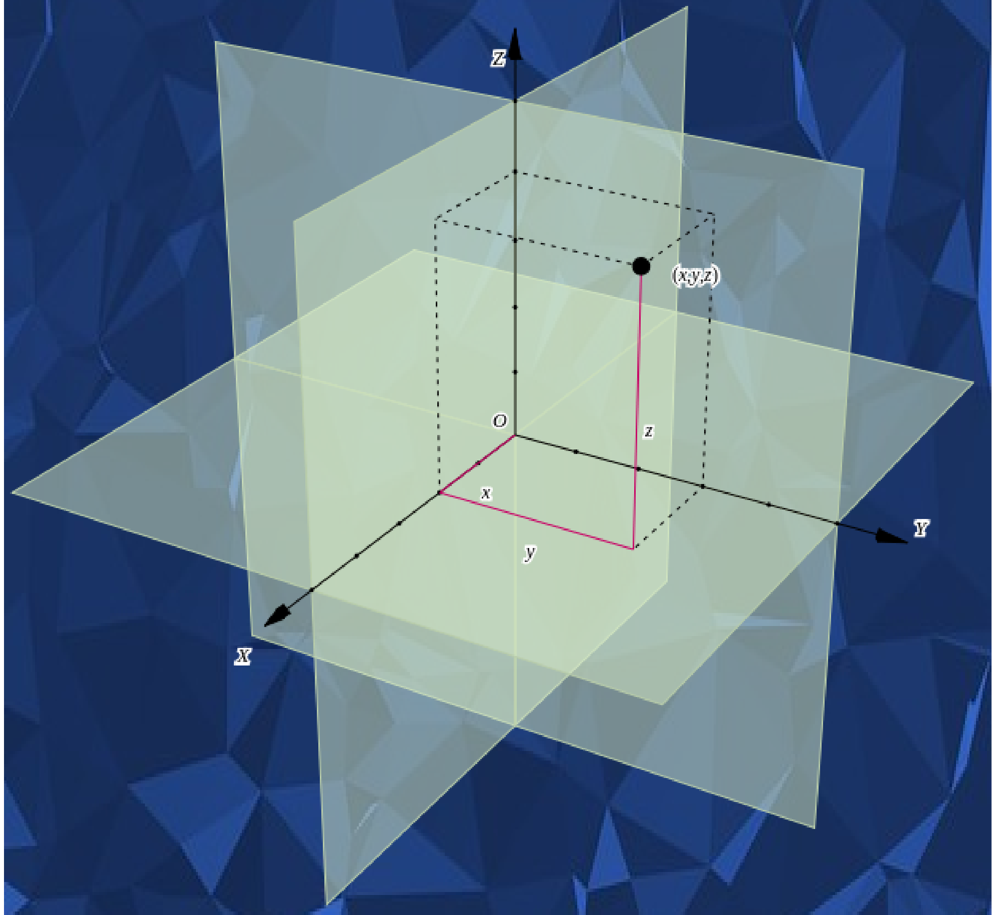
- Euklidovský priestor
- Pozícia je relatívna – záleží na referenčnom bode a meradle
- Rozlišujeme medzi lokálnymi súradnicami objektu a globálnymi súradnicami sveta



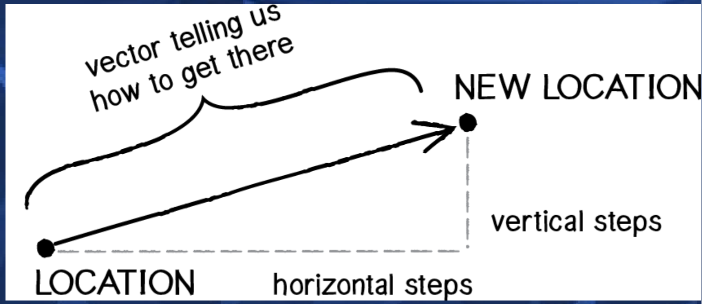
Karteziánsky súradnicový systém





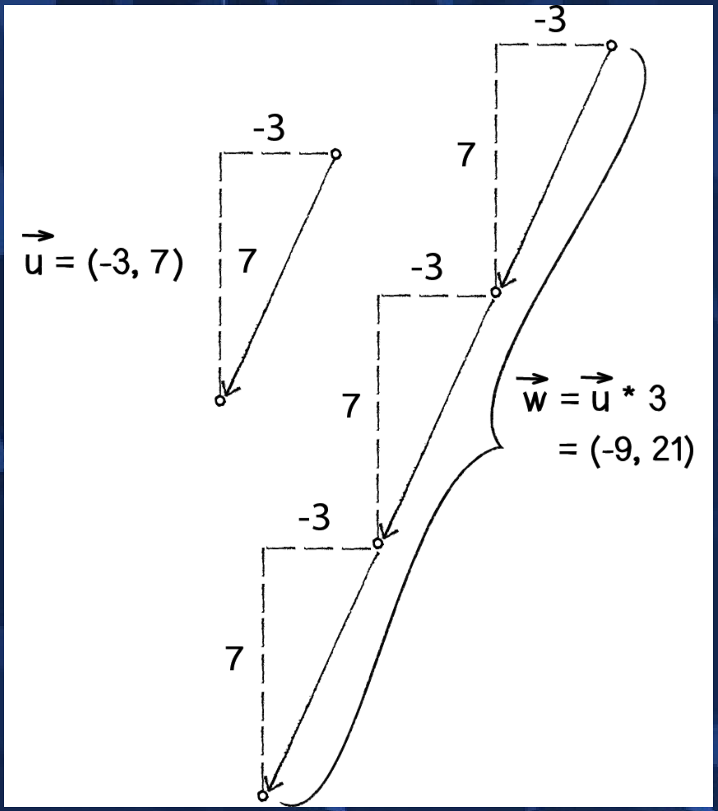


Čo je vektor?

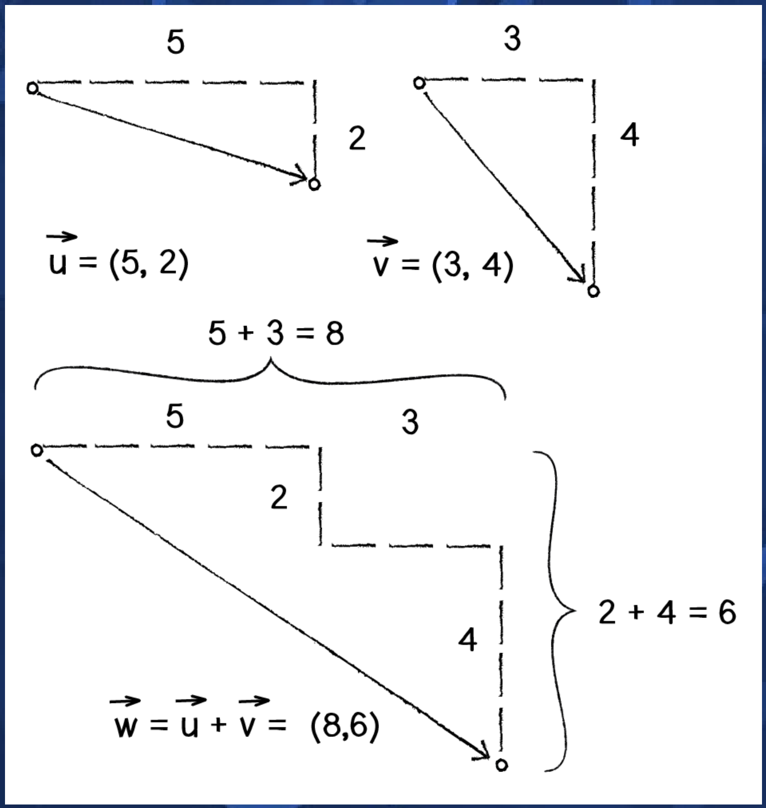


- Aritmeticky – usporiadaná postupnosť čísel
- Geometricky – smer a dĺžka
- Musia platiť dve vlastnosti:

$\vec{w} = n \cdot \vec{v}$

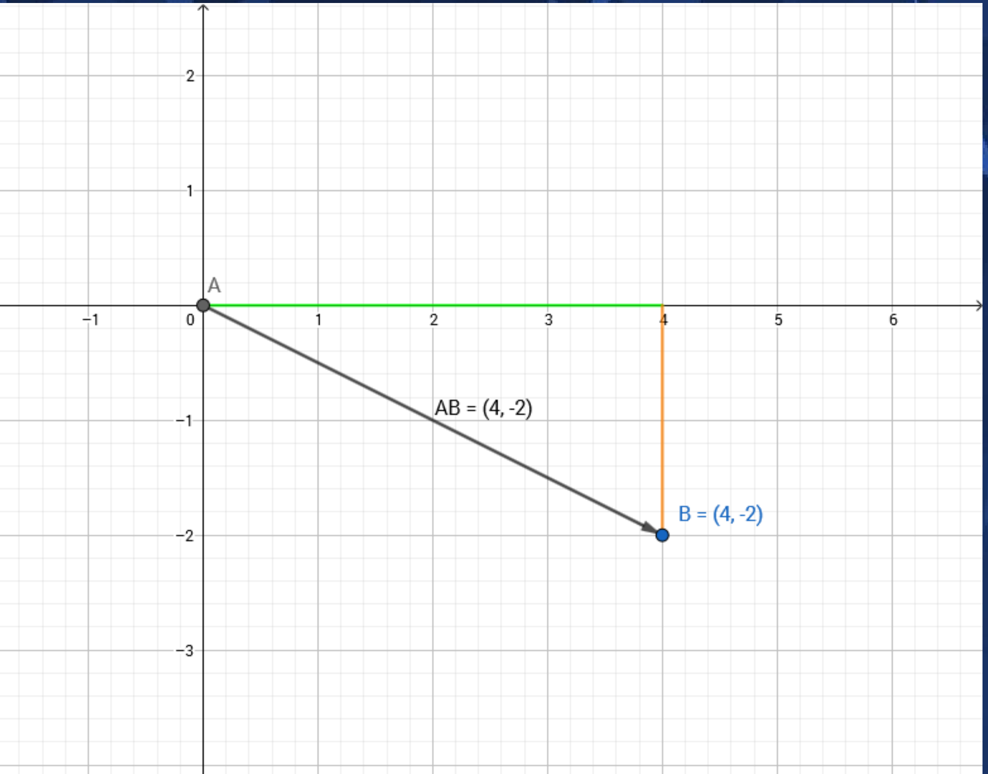


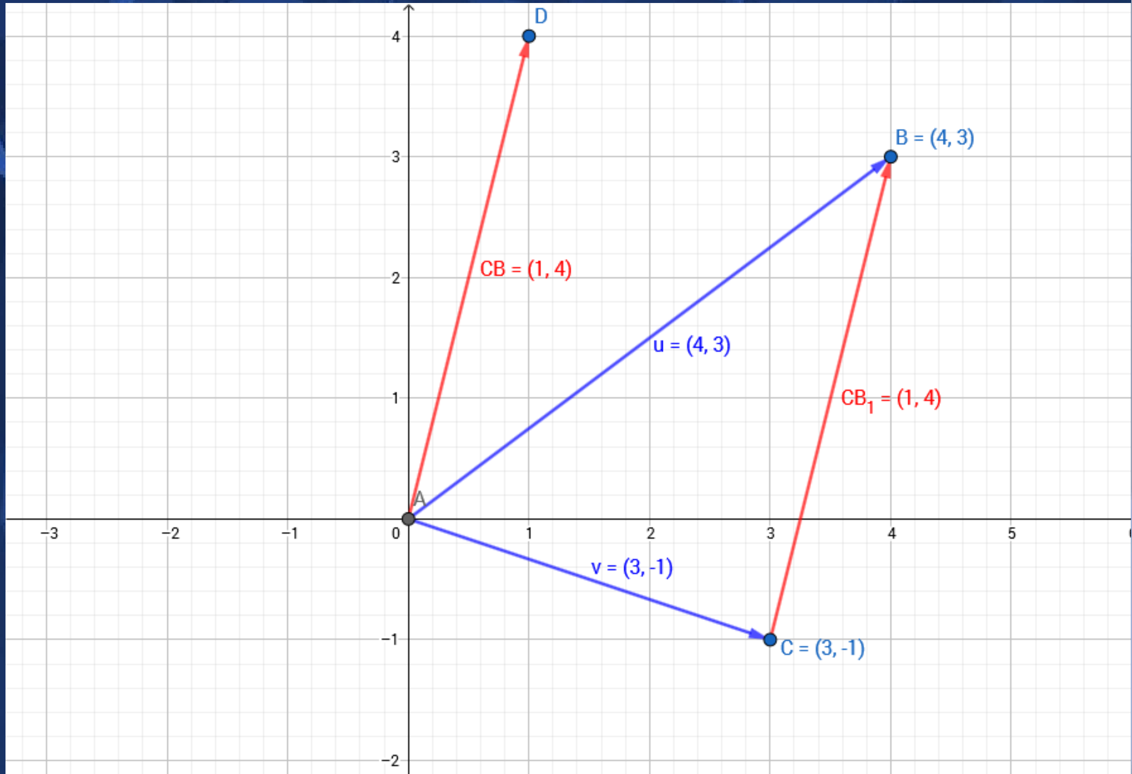
$\vec{w} = \vec{v} + \vec{u}$



Dualita: Bod / Vektor

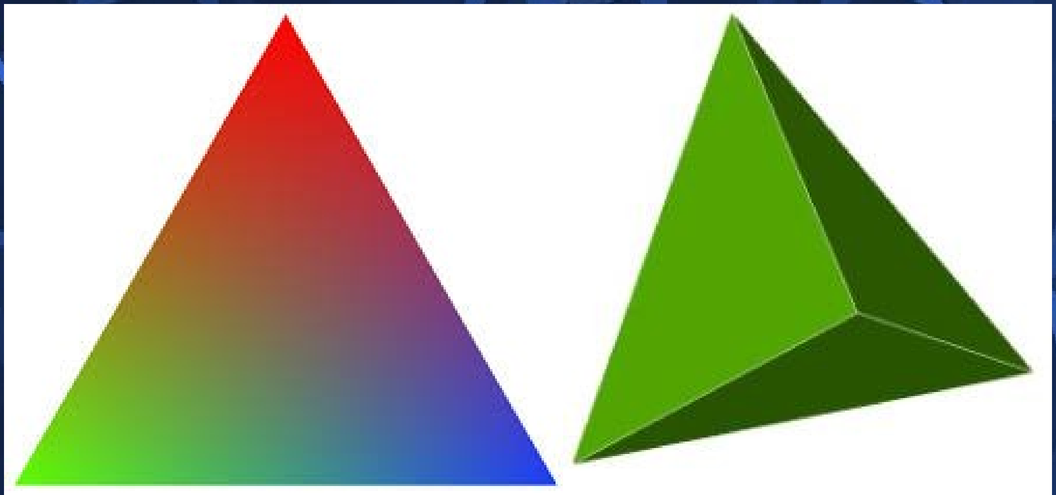
- Bod je určený vektorom zapichnutým v počiatku
- Vektor je určený koncovým bodom do ktorého príde
- Vzhľadom na počiatok (Bod = miesto, Vektor = cesta)
- Podobné ako časticovo-vlnový dualizmus

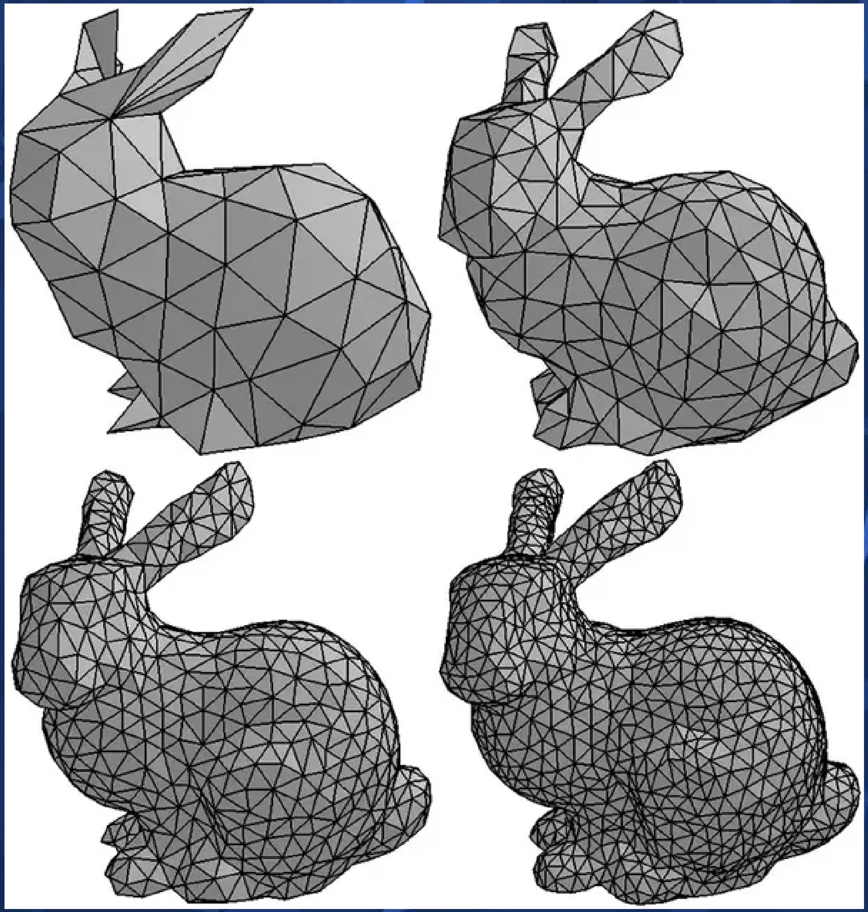




Svet trojuholníkov

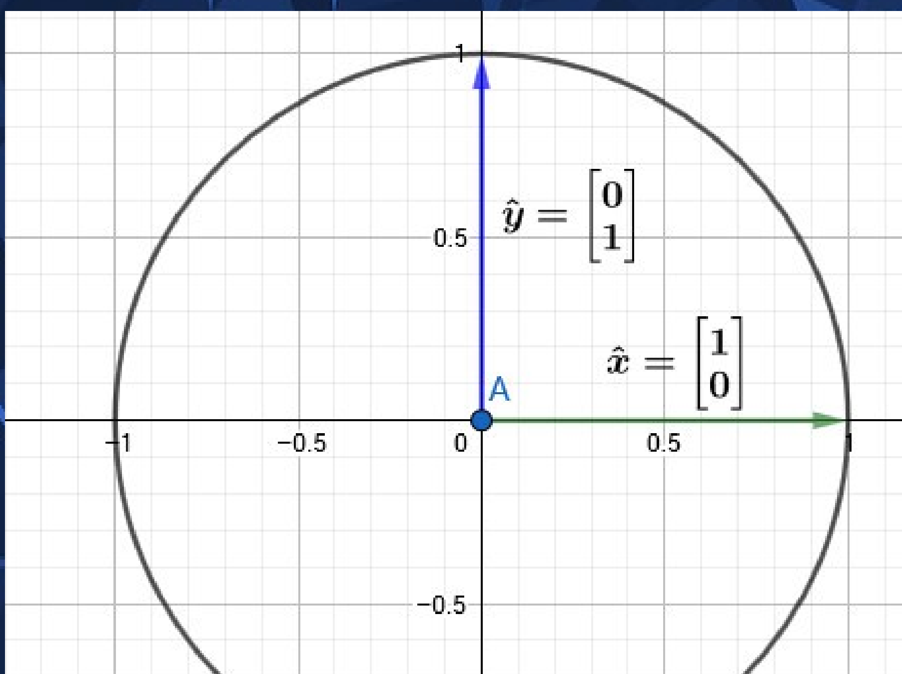
- Dá sa ním aproximovať akýkoľvek povrch vo vesmíre
- Najjednoduchší mnohouholník (3 vrcholy), Konvexný, Koplanárny
- Vytvárajú mesh



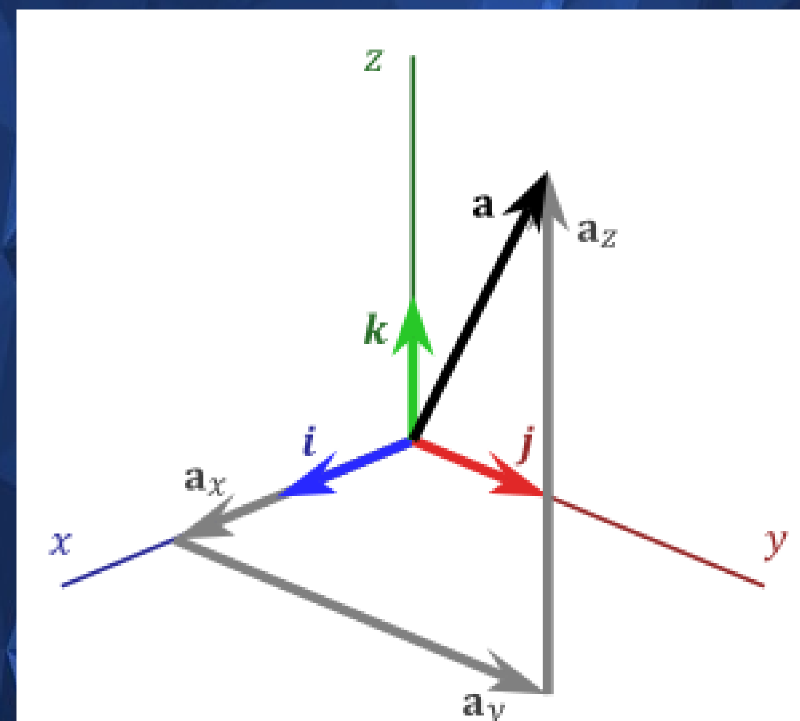


Jednotkové vektory

- Štandardná báza = jednotkové vektory súradnicových osí
- Každý vektor je lineárnou kombináciou bázových vektorov



$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \hat{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ; \hat{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ; \hat{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

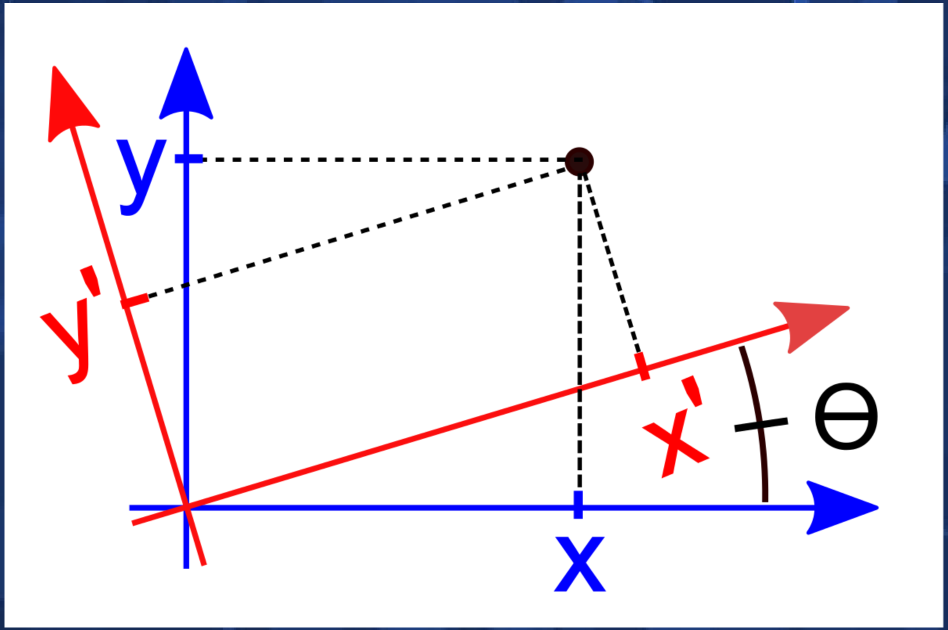
Intuitívny pohľad na matice

- Hovoria o zmene súradnicovej sústavy voči pôvodnej
- 1. Bázové vektory do tabuľky

$$x = 1$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- 2. Vznikne matica identity
- 3. Zmenou čísel môžeme meniť každý vektor v priestore

Použitie lineárnej transformácie

	x̂	ŷ	ẑ
x	1	0	0
y	0	1	0
z	0	0	1

- Je to funkcia $\vec{b} = L(\vec{a})$
- Matica je tabuľka hovoriaca kam sa posunú nové súradnicové osi vzhľadom na pôvodné.
- Nový vektor vypočítame – **Násobenie vektora a matice**

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_0 & \hat{y}_0 \\ \hat{x}_1 & \hat{y}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} \hat{y}_0 \\ \hat{y}_1 \end{bmatrix}$$

- Matica identity nezmení vektor

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Rovnoľahlosť

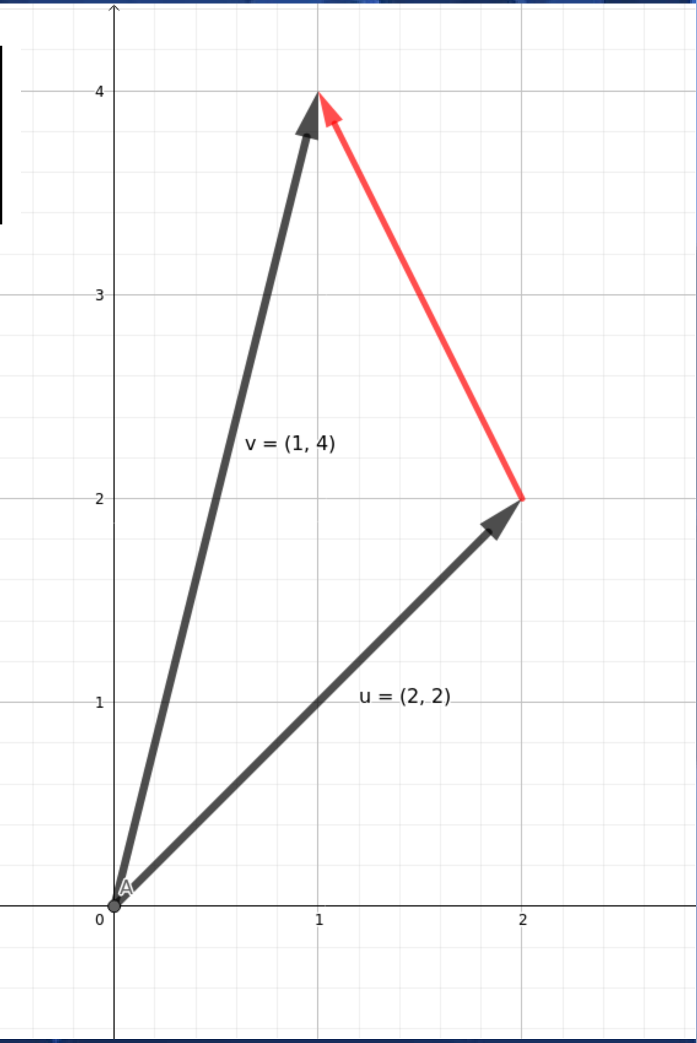
$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

- Zmena mierky
- Súčinom skalára a vektora – obe súradnice rovnako

$$k \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot x \\ k \cdot y \end{bmatrix} \qquad 3 \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

- Matica rovnoľahlosti

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$



Posunutie (translácia)

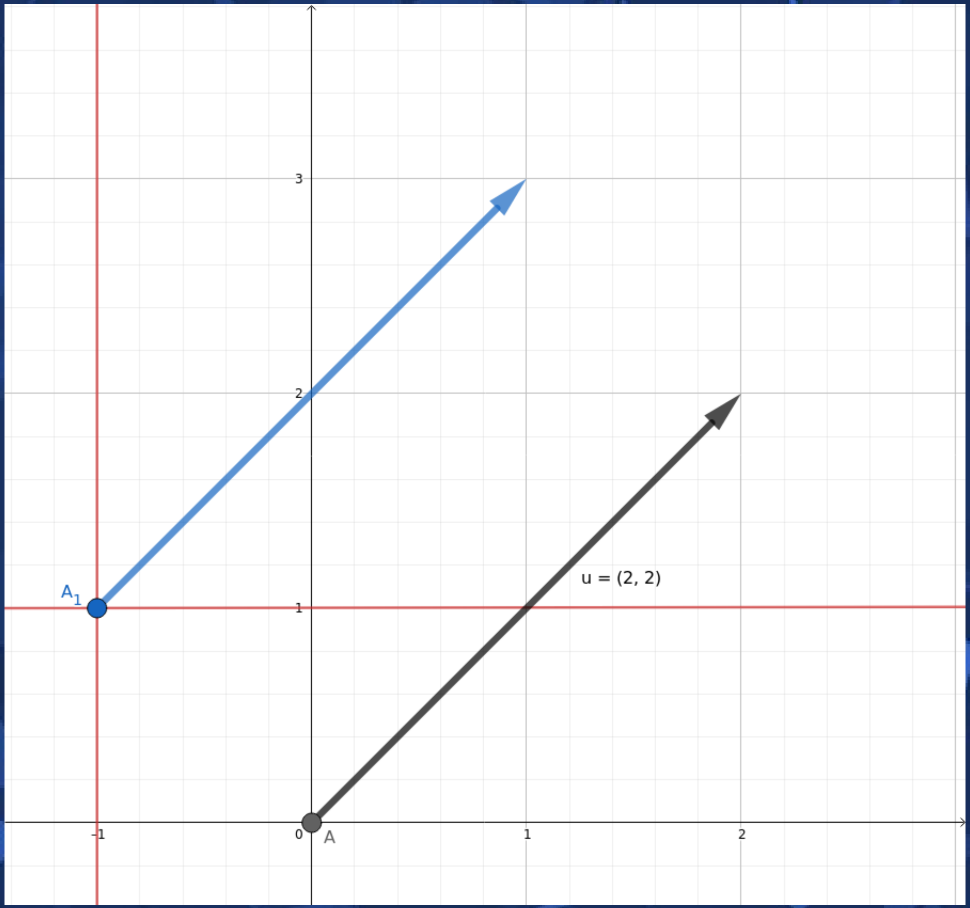
- **Súčtová** operácia – ostatné sú násobiace – nevyhovuje!

$$x' = x + \Delta x$$
$$y' = y + \Delta y$$

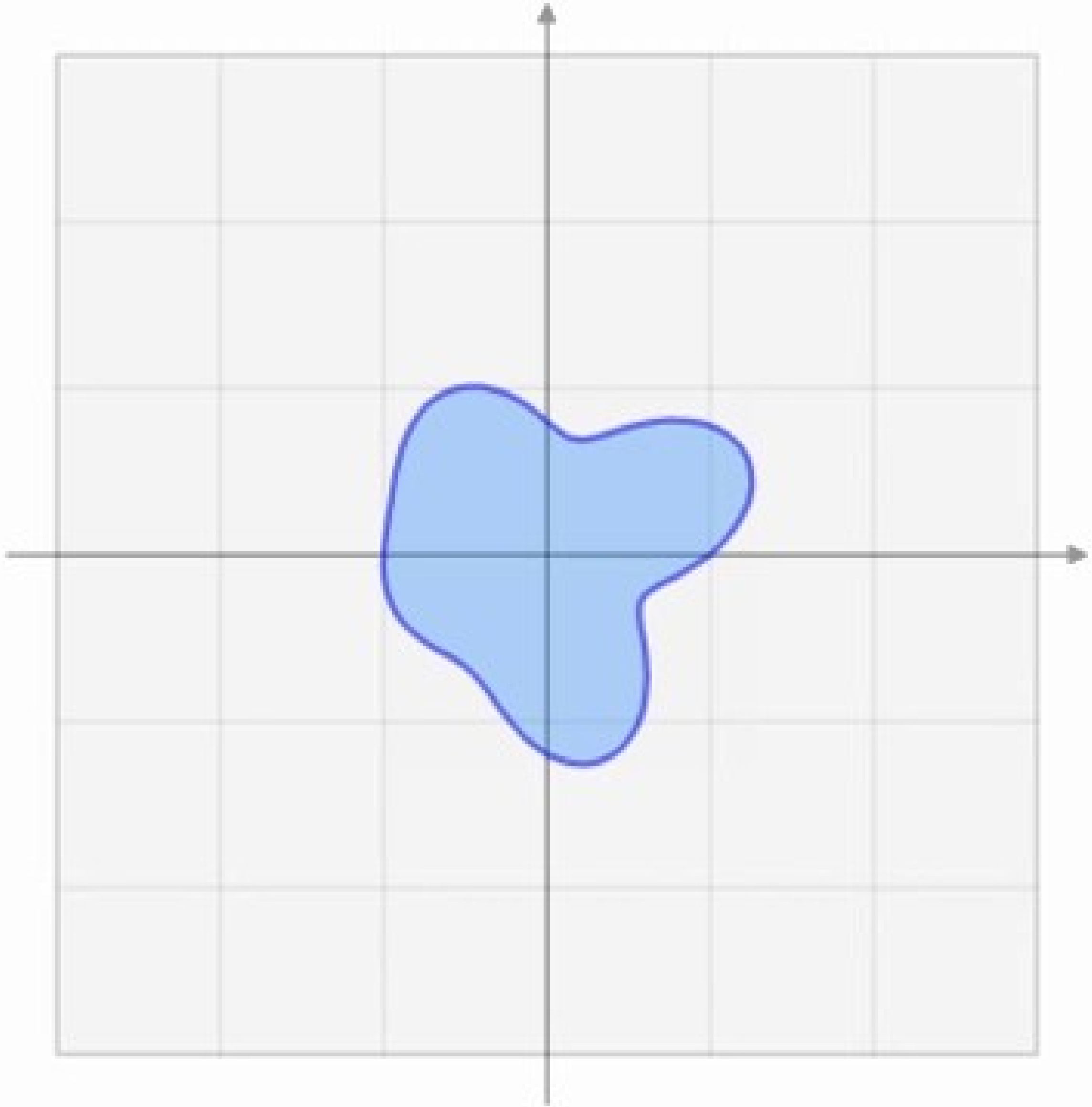
- Matica skosenia v 3D vyzerá

  v 2D ako posunutie

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



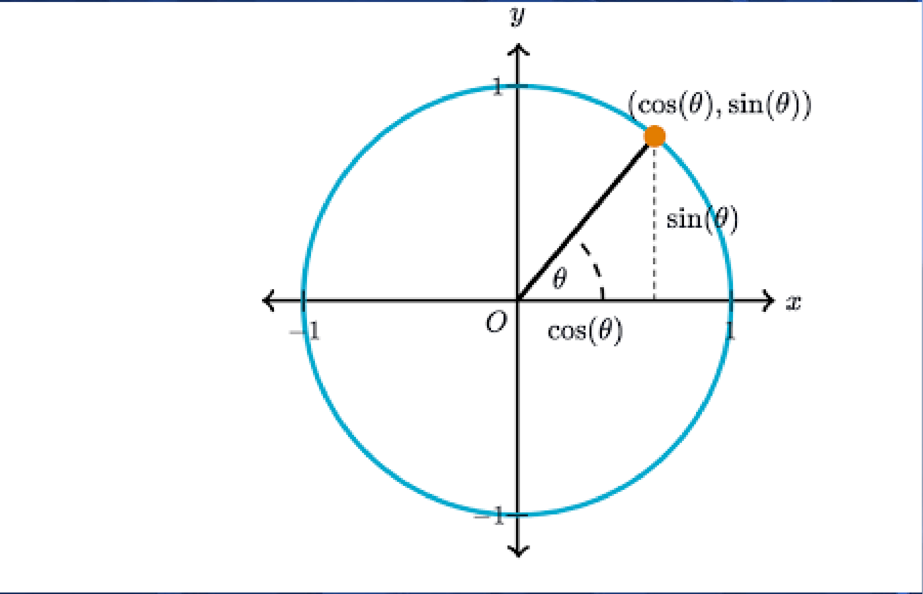
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Otočenie (rotácia) v 2D

- Začnime s identitou – aké trigonometrické funkcie pri uhle 0 nám dajú dané čísla – **pozor na smer otáčania**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(0) & -\sin(0) \\ -sin(0) & cos(0) \end{bmatrix}$$



- Rotácia o 90° stupňov. Ako 180°?

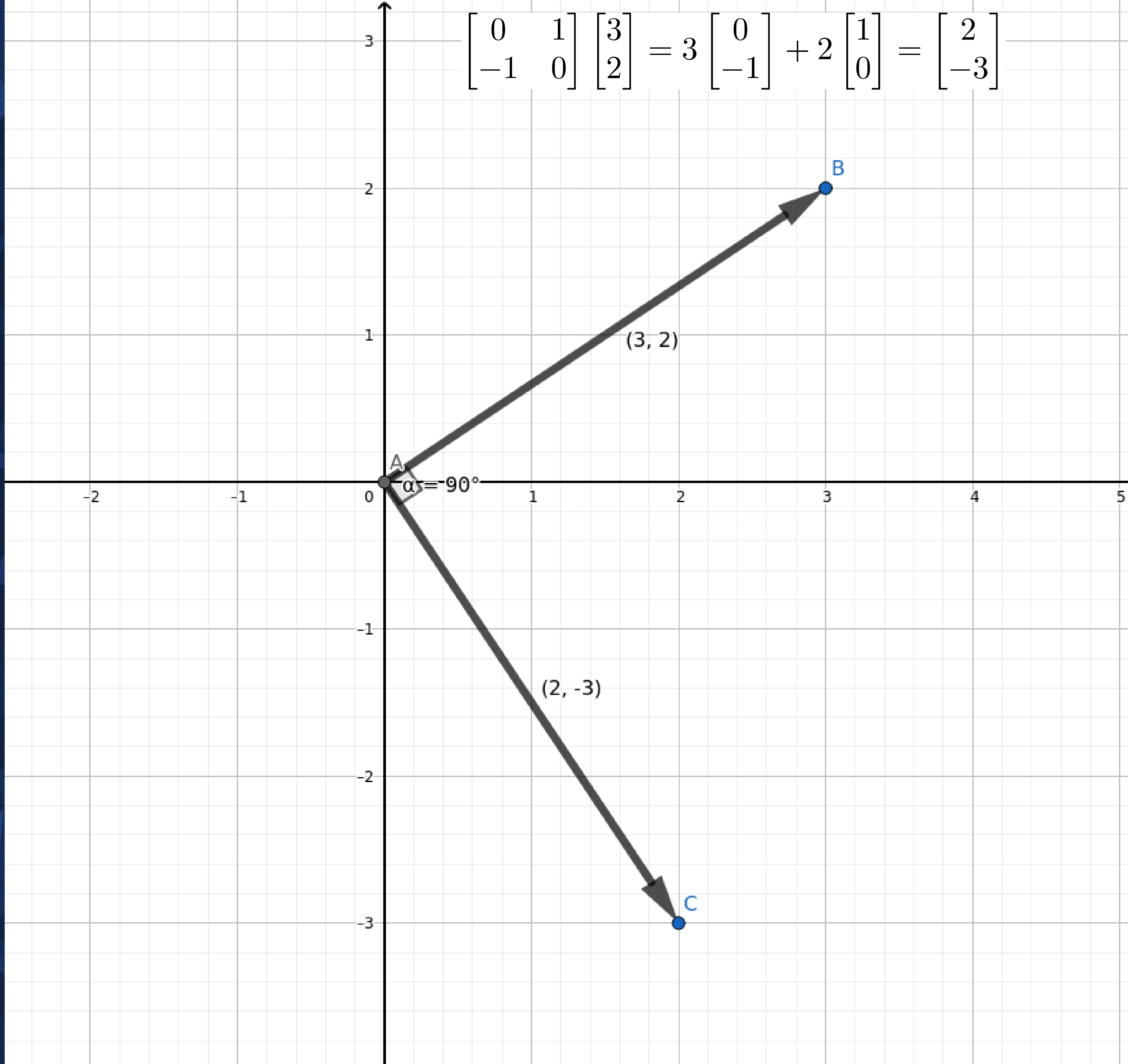
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Všeobecná matica (proti smeru hodinových ručičiek)

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$x' = x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha)$$
$$y' = x \cdot \sin(\alpha) + y \cdot \cos(\alpha)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$



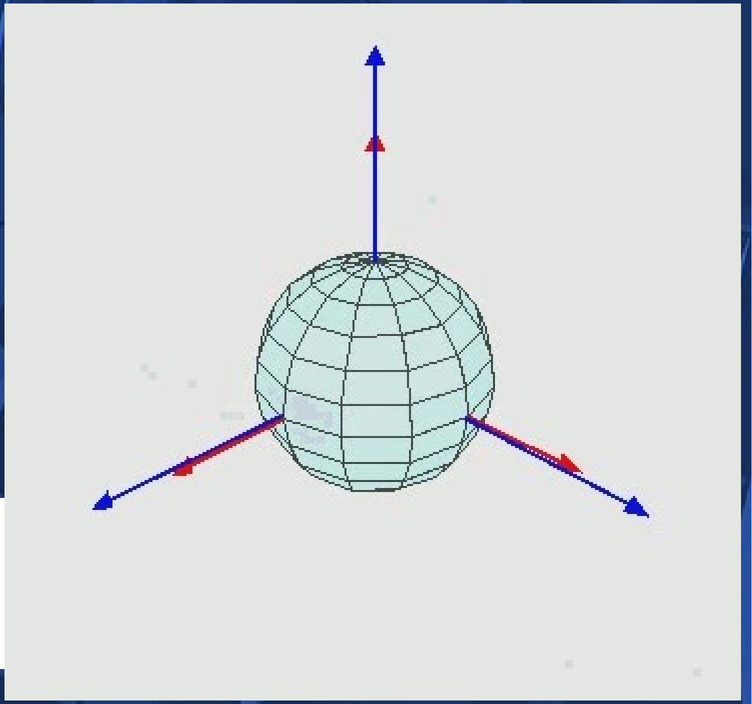
Rotácia v 3D a iné

- V praxi častejšie (gyroskopy, joysticky, akcelerometre, hry, VR headsety)
- Perspektívna projekcia - pri projekcii 3D sveta na 2D povrch
- Eulerove uhly
- Kvaternióny

$$\mathbf{A}_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_Y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

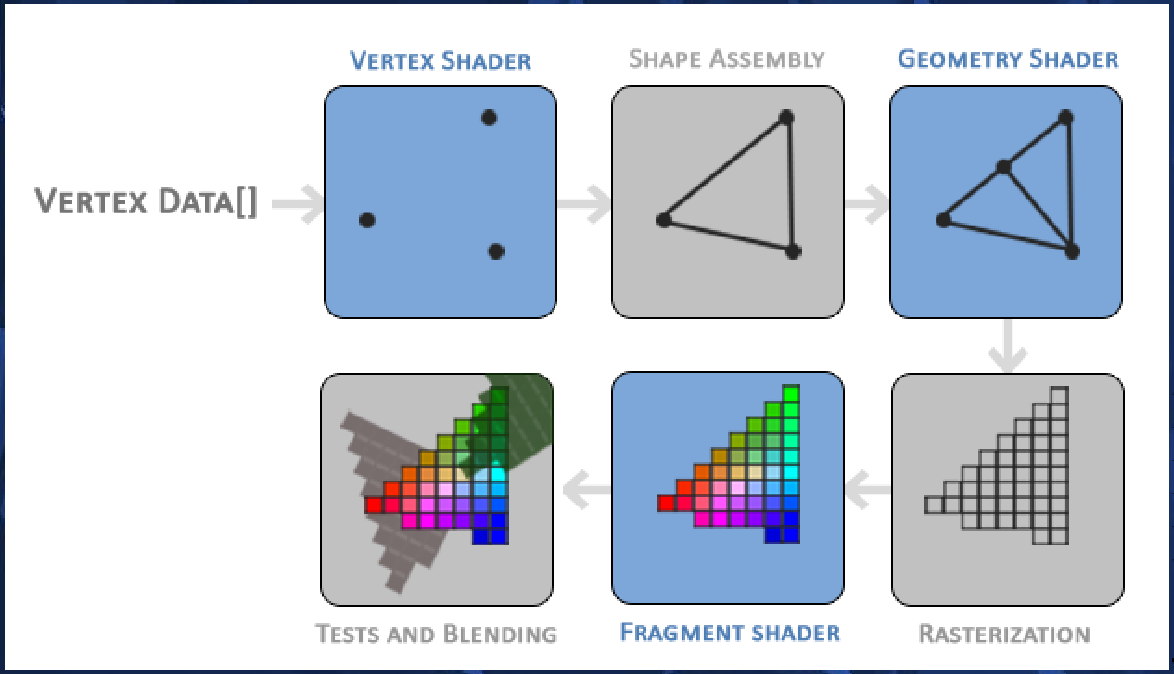
$$\mathbf{A}_Z = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

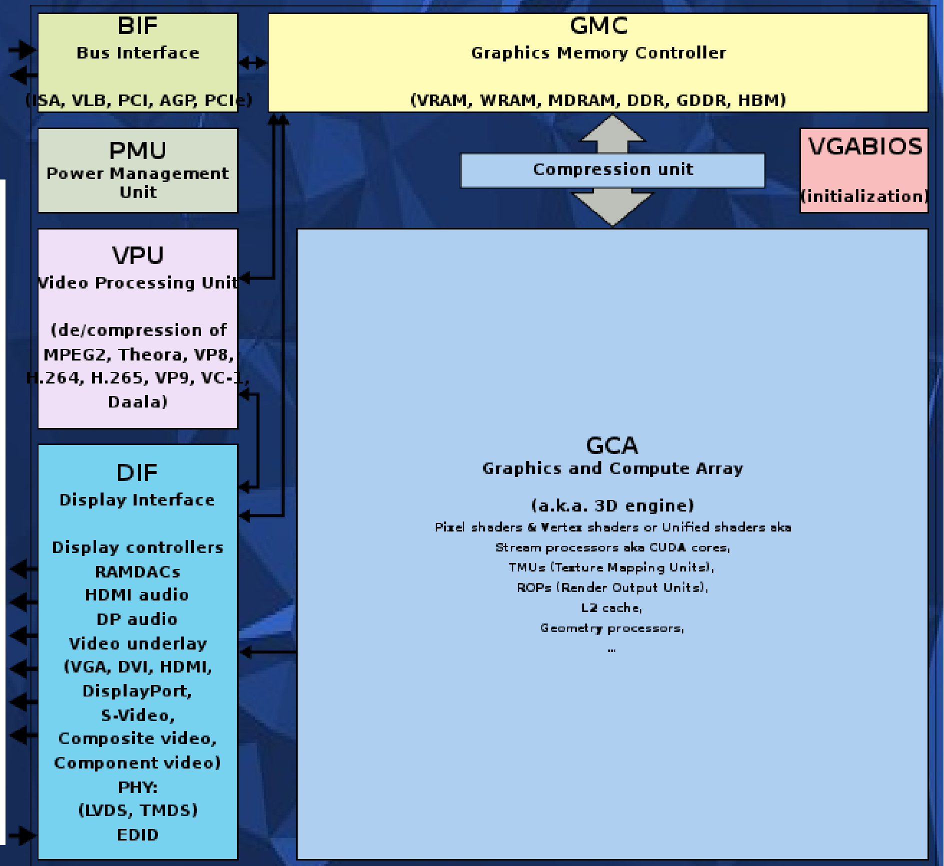


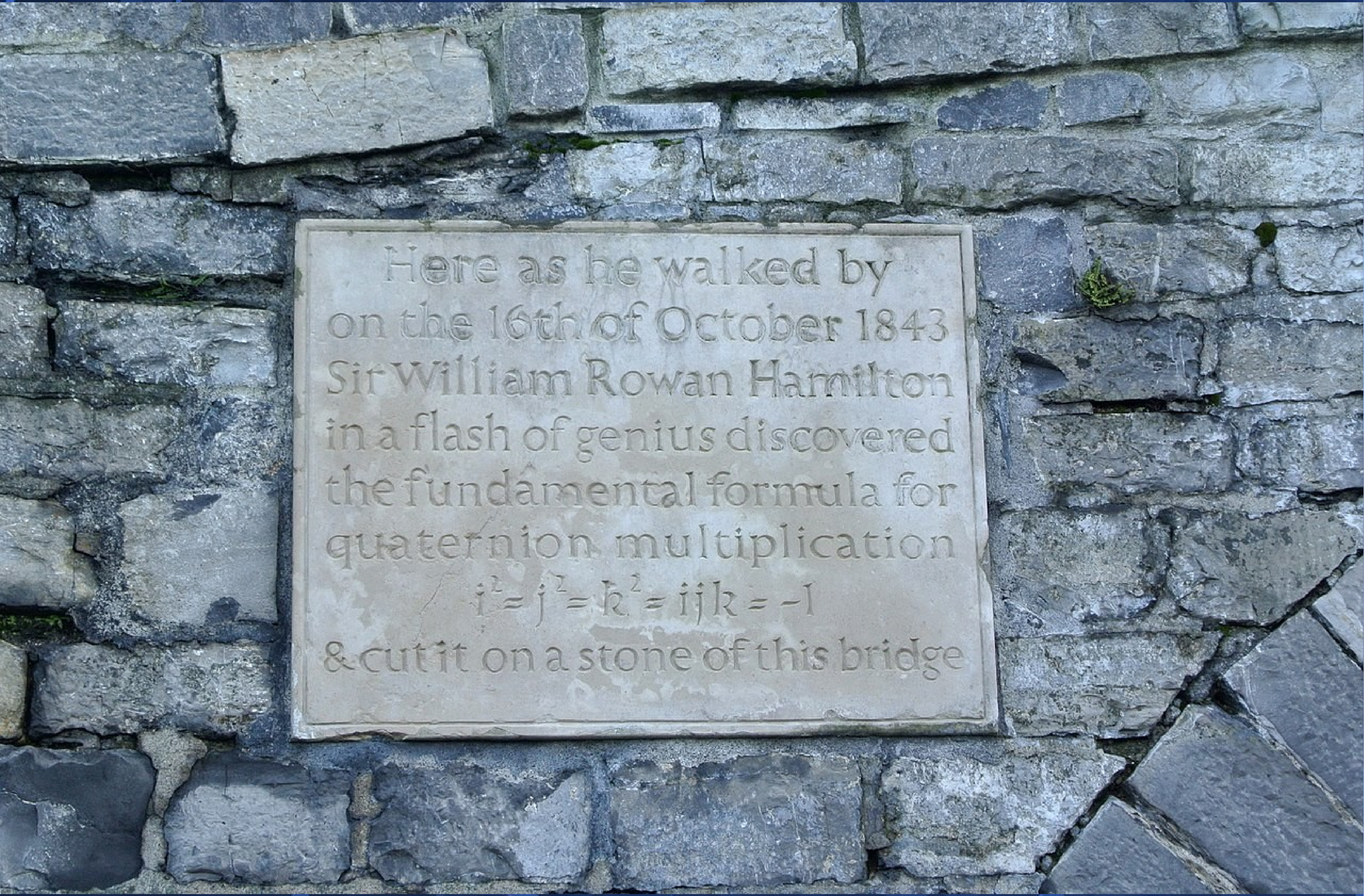
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi & -\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\sin\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\psi + \cos\phi\sin\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi + \cos\phi\sin\theta\sin\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$

Ako počítajú grafické karty?

- Skladanie transformácii (**násobenie matíc**) – $O(n^3)$
- Shader – Aplikovanie: **Paralelizmus** pre každý vertex
- Knižnice OpenGL – DirectX






Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
& cut it on a stone of this bridge